

2019年

高二数学

行列式与矩阵

行列式

1. 行列式的性质：
 (1) 行列式对换两行(列)，行列式变号。
 (2) 行列式中两行(列)成比例，则行列式为零。
 (3) 行列式中某一行(列)的公因子可以提到行列式外面。

2. 克拉默法则：
 对于线性方程组 $Ax = b$ ，若系数行列式 $|A| \neq 0$ ，则方程组有唯一解，解为 $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ ，其中 A_i 是将 A 中第 i 列换成 b 得到的行列式。

3. 逆矩阵：
 对于可逆矩阵 A ，存在唯一的逆矩阵 A^{-1} ，使得 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ 。逆矩阵的性质：
 (1) $(A^{-1})^{-1} = A$
 (2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
 (3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ($k \neq 0$)

4. 矩阵的秩：
 矩阵 A 的秩 $r(A)$ 是指 A 中非零子式的最高阶数。秩的性质：
 (1) $r(A) = r(A^T)$
 (2) $r(A) + r(A - AB) = r(A)$
 (3) $r(A) + r(B) \leq r(A, B)$

5. 初等变换：
 对矩阵 A 进行初等变换，不改变 A 的秩。初等变换包括：
 (1) 交换两行(列)。
 (2) 某一行(列)乘以非零常数 k 。
 (3) 某一行(列)加上另一行(列)的 k 倍。

6. 分块矩阵：
 将矩阵 A 按行和列分成若干块，记为 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 。分块矩阵的运算：
 (1) $(A+B)^T = A^T + B^T$
 (2) $(kA)^T = kA^T$
 (3) $(AB)^T = B^T A^T$

7. 正交矩阵：
 满足 $A^T = A^{-1}$ 的矩阵称为正交矩阵。正交矩阵的性质：
 (1) $|A| = \pm 1$
 (2) $A^{-1} = A^T$
 (3) 正交矩阵的列(行)向量是单位正交向量。

8. 相似矩阵：
 若存在可逆矩阵 P ，使得 $B = P^{-1}AP$ ，则称 A 与 B 相似。相似矩阵的性质：
 (1) 相似矩阵有相同的特征值和特征向量。
 (2) $|A - \lambda E| = |B - \lambda E|$
 (3) $r(A) = r(B)$

9. 二次型：
 二次型 $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ 的矩阵表示为 $f(x) = x^T Ax$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ 。二次型的分类：
 (1) 正定： A 的所有特征值均为正。
 (2) 负定： A 的所有特征值均为负。
 (3) 不定： A 的特征值有正有负。

10. 线性方程组的解法：
 高斯消元法：将增广矩阵 (A, b) 化为行阶梯形矩阵，然后回代求解。
 矩阵法：若 $|A| \neq 0$ ，则 $x = A^{-1}b$ 。

向量代数

向量的概念

1. 向量的定义：
 既有大小又有方向的量称为向量。向量的表示：
 (1) 有向线段 \vec{AB}
 (2) 字母 a, b, c
 (3) 粗体字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

2. 向量的运算：
 (1) 加法： $a + b$ (三角形法则、平行四边形法则)
 (2) 减法： $a - b$
 (3) 数乘： ka (方向不变，大小变为 $|k|$ 倍； $k < 0$ 时方向相反)

3. 向量的模：
 向量 a 的模 $|a|$ 是指向量的长度。模的性质：
 (1) $|ka| = |k||a|$
 (2) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (三角不等式)

4. 单位向量：
 模为1的向量称为单位向量，记为 e 。任意向量 a 可以表示为 $a = |a|e$ 。

5. 向量的分解：
 任意向量 a 可以沿两个不共线的方向 e_1, e_2 分解：
 $a = x_1e_1 + x_2e_2$

6. 向量的投影：
 向量 a 在向量 b 上的投影为 $|a| \cos \theta$ ，其中 θ 是 a 与 b 的夹角。

7. 向量的数量积：
 两个向量 a, b 的数量积 $a \cdot b = |a||b| \cos \theta$ 。数量积的性质：
 (1) $a \cdot a = |a|^2$
 (2) $a \cdot b = b \cdot a$
 (3) $(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$
 (4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

8. 向量的向量积：
 两个向量 a, b 的向量积 $a \times b$ 的方向垂直于 a, b 所在的平面，大小为 $|a||b| \sin \theta$ 。向量积的性质：
 (1) $a \times a = 0$
 (2) $a \times b = -b \times a$
 (3) $(ka) \times b = k(a \times b)$
 (4) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

9. 混合积：
 三个向量 a, b, c 的混合积 $(a, b, c) = a \cdot (b \times c)$ 。混合积的性质：
 (1) $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$
 (2) $(a, b, c) = - (a, c, b) = - (b, c, a)$
 (3) $(a, b, c) = 0$ 当且仅当 a, b, c 共面。

10. 平面方程：
 已知平面上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和法向量 $n = (A, B, C)$ ，则平面的方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 。

11. 直线方程：
 已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和方向向量 $s = (l, m, n)$ ，则直线的方程为 $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 。

空间解析几何

平面方程

1. 平面的截距式方程：
 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (其中 $a, b, c \neq 0$)

2. 平面的点法式方程：
 已知平面上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和法向量 $n = (A, B, C)$ ，则平面的方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 。

3. 平面的一般式方程：
 $Ax + By + Cz + D = 0$ (其中 A, B, C 不同时为零)

4. 两平面的位置关系：
 设两平面的法向量分别为 $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 。
 (1) 平行： $n_1 \parallel n_2$
 (2) 垂直： $n_1 \perp n_2$
 (3) 相交： n_1 与 n_2 不平行也不垂直

5. 两平面的交线：
 求两平面 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 的交线方程，可联立两方程求解。

6. 点到平面的距离：
 点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。

7. 两平面的夹角：
 两平面 π_1, π_2 的夹角 θ 满足 $\cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$ 。

8. 直线与平面的位置关系：
 已知直线的方向向量 $s = (l, m, n)$ 和平面 π 的法向量 $n = (A, B, C)$ 。
 (1) 平行： $s \perp n$
 (2) 垂直： $s \parallel n$
 (3) 相交： s 与 n 既不平行也不垂直

9. 直线与直线的距离：
 两条异面直线 l_1, l_2 的距离 $d = \frac{|(s_1 \times s_2) \cdot (M_2 - M_1)|}{|s_1 \times s_2|}$ ，其中 s_1, s_2 是两直线的方向向量， M_1, M_2 是两直线上任意一点。

10. 直线与直线的夹角：
 两条相交直线 l_1, l_2 的夹角 θ 满足 $\cos \theta = \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1||s_2|}$ 。

11. 平面与平面的距离：
 两个平行平面 $\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 和 $\pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。

-10z)

+4(e_x

-j)e_y

3e_z)e^{-j}

jkz

的内导体

个电常数

分界

电场强

的电容

度分布;

质中外

的介电

强度E

荷密度

a 的两

为ε, 电

应, 求

印廷外

功率。

量和平均

区域中

σ₂ = 0

质 1 垂

入射波

入射到

电场振幅

的电场

强度E₁(z)

$$+4(e_x - j)e_y + 3e_z)e^{-j(kz)}$$

$$\pi(2x - \sqrt{5}y - \sqrt{5}z)$$

半径为

分别为ε₁

半径为 b

度分布;

加均匀电

数为ε,

形导体平

导率为σ

量和平均

区域中

质 1 的

ε_{r2} = 1

入射到

电场振幅

强度E₁(z)

内、外导体之间
 和σ₂, 两层介质
 求:

有一个半径为 a

器, 间距为 d,
 加缓变电压 u =

u_{r1} = 1; 在 z>0
 率为 ω = 5 × 10⁸
 沿 x 方向的线极